对角多项式矩阵的标准形及其应用

谭宜家

（福州大学数学与统计学院，福州 350108）

2024年12月28日

目录

定义与符号

1.设F是一个数域，$F[x]$表示F上的多项式环, $F^{m\times n}$和$F[x]^{m\times n}$分别表示域F和环$F[x]$上所有$m\times n$矩阵组成的集合。

定义与符号

1.设F是一个数域，$F[x]$表示F上的多项式环, $F^{m\times n}$和$F[x]^{m\times n}$分别表示域F和环$F[x]$上所有$m\times n$矩阵组成的集合。
2.对于$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in F[x]$, 用

$$(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))(\text{或}\,\gcd\{f_i(x)|1 \le i \le n\})$$

和

$$[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)](\text{或} lcm\{f_i(x)|1 \le i \le n\})$$

分别表示多项式$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$的首项系数为1的最大公因式和最小公倍式。

定义与符号

1.设F是一个数域，$F[x]$表示F上的多项式环, $F^{m\times n}$和$F[x]^{m\times n}$分别表示域F和环$F[x]$上所有$m\times n$矩阵组成的集合。
2.对于$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\in F[x]$, 用

$$(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))(\text{或}\ \mathrm{gcd}\{f_i(x)|1\leq i\leq n\})$$

和

$$[f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)](\text{或} lcm\{f_i(x)|1\leq i\leq n\})$$

分别表示多项式$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$的首项系数为1的最大公因式和最小公倍式。
3.设$\mathbf{A}(x)=(a_{ij}(x))_{n\times n}\in F[x]^{n\times n}$，如果当$i\neq j$时，$a_{ij}(x)=0$,则称$\mathbf{A}(x)$为对角矩阵，记为 $\mathbf{A}(x)=diag(a_{11}(x), a_{22}(x), \cdots, a_{nn}(x))$。

1.定理1:设$\mathbf{A}(x)=diag(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))\in F[x]^{n\times n}$, 其中$f_1(x)$, $f_2(x)$,$\cdots$,$f_n(x)$ 是非零多项式。则有

主要结论

1.定理1:设$\mathbf{A}(x) = diag(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) \in F[x]^{n\times n}$, 其中$f_1(x)$, $f_2(x)$,$\cdots$, $f_n(x)$ 是非零多项式。则有
(i) $\mathbf{A}(x)$的标准形具有形式

$$\mathbf{B}(x) = diag(d_1(x), d_2(x), \cdots, d_n(x)),$$

其中$d_i(x) \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$,且当$i \leq j$时，$d_i(x)|d_j(x)$;

主要结论

1.定理1:设$\mathbf{A}(x)=diag(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))\in F[x]^{n\times n}$, 其中$f_1(x)$, $f_2(x)$,$\cdots,f_n(x)$ 是非零多项式。则有

(i) $\mathbf{A}(x)$的标准形具有形式

$$\mathbf{B}(x)=diag(d_1(x),d_2(x),\cdots,d_n(x)),$$

其中$d_i(x)\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n$,且当$i\leq j$时，$d_i(x)|d_j(x)$;

(ii)$d_i(x)=\gcd\{lcm\{f_{n_1}(x),f_{n_2}(x),\cdots,f_{n_i}(x)\}|1\leq n_1<\cdots<n_i\leq n\}$, $1\leq i\leq n$;

主要结论

1.定理1:设$\mathbf{A}(x)=diag(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))\in F[x]^{n\times n}$, 其中$f_1(x)$, $f_2(x)$,$\cdots,f_n(x)$ 是非零多项式。则有

(i) $\mathbf{A}(x)$的标准形具有形式

$$\mathbf{B}(x)=diag(d_1(x),d_2(x),\cdots,d_n(x)),$$

其中$d_i(x)\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n$,且当$i\leq j$时，$d_i(x)|d_j(x)$;

(ii)$d_i(x)=\gcd\{lcm\{f_{n_1}(x),f_{n_2}(x),\cdots,f_{n_i}(x)\}|1\leq n_1<\cdots<n_i\leq n\}$, $1\leq i\leq n$;

(iii)$d_{n-i+1}(x)=lcm\{\gcd\{f_{n_1}(x),f_{n_2}(x),\cdots,f_{n_i}(x)\}|1\leq n_1<n_2<\cdots<n_i\leq n\},1\leq i\leq n$.

2.由定理1可看出,

$$d_1(x)=\gcd\{f_i(x)|1\le i\le n\}=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)),$$

$$d_n(x)=lcm\{f_i(x)|1\le i\le n\}=[f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)].$$

又因为$\mathbf{A}(x)$与其标准形$\mathbf{B}(x)$等价, 所以存在可逆矩阵

$$\mathbf{U}(x)=(u_{ij}(x))_{n\times n},\mathbf{V}(x)=(v_{ij}(x))_{n\times n}\in F[x]^{n\times n},$$

使得$\mathbf{U}(x)\mathbf{A}(x)\mathbf{V}(x)=\mathbf{B}(x)$, 于是

$$d_1(x)=\sum_{i,j=1}^{n}u_{1i}(x)a_{ij}(x)v_{j1}(x)=\sum_{i=1}^{n}u_{1i}(x)v_{i1}(x)f_i(x).$$

3.基于上述讨论,下面提供一个同时求可逆矩阵$\mathbf{U}(x)$和$\mathbf{V}(x)$以及最大公因式$d_1(x)$和最小公倍式$d_n(x)$并将$d_1(x)$表为$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$的组合的有效方法.

3.基于上述讨论,下面提供一个同时求可逆矩阵$\mathbf{U}(x)$和$\mathbf{V}(x)$以及最大公因式$d_1(x)$和最小公倍式$d_n(x)$并将$d_1(x)$表为$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$的组合的有效方法.

4.构造$2n$阶矩阵$\begin{pmatrix} \mathbf{A}(x) & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix}$, 其中$\mathbf{E}_n$是$n$阶单位矩阵. 于是有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}(x) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}(x) & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}(x) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(x)\mathbf{A}(x)\mathbf{V}(x) & \mathbf{U}(x) \\ \mathbf{V}(x) & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{B}(x) & \mathbf{U}(x) \\ \mathbf{V}(x) & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

3.基于上述讨论,下面提供一个同时求可逆矩阵$\mathbf{U}(x)$和$\mathbf{V}(x)$以及最大公因式$d_1(x)$和最小公倍式$d_n(x)$并将$d_1(x)$表为$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$的组合的有效方法.

4.构造$2n$阶矩阵$\begin{pmatrix} \mathbf{A}(x) & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix}$, 其中$\mathbf{E}_n$是$n$阶单位矩阵. 于是有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}(x) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}(x) & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}(x) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(x)\mathbf{A}(x)\mathbf{V}(x) & \mathbf{U}(x) \\ \mathbf{V}(x) & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{B}(x) & \mathbf{U}(x) \\ \mathbf{V}(x) & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

5.从上式可看出,只要对矩阵$\begin{pmatrix} \mathbf{A}(x) & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix}$的前$n$行与前$n$列作初等变换,将$\mathbf{A}(x)$变为标准形$\mathbf{B}(x)$,则该矩阵右上方的单位矩阵$\mathbf{E}_n$变成可逆矩阵$\mathbf{U}(x)$, 左下方的单位矩阵$\mathbf{E}_n$变成可逆矩阵$\mathbf{V}(x)$, 同时获得最大公因式$d_1(x)$和最小公倍式$d_n(x)$,并将$d_1(x)$表为$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$的一个组合.

主要结论

6.例1 设$f_1(x)=x^3-x^2, f_2(x)=x^3-2x^2+x, f_3(x)=x^3-x^2-x+1$ $\in F[x]$, $\mathbf{A}(x)=diag(f_1(x),f_2(x),f_3(x))\in F[x]^{3\times 3}$.
(1)求可逆矩阵$\mathbf{U}(x),\mathbf{V}(x)\in F[x]^{3\times 3}$,使得$\mathbf{U}(x)\mathbf{A}(x)\mathbf{V}(x)$为标准形;
(2)求$(f_1(x),f_2(x),f_3(x))$与$[f_1(x),f_2(x),f_3(x)]$,并将$(f_1(x),f_2(x),$ $f_3(x))$表为多项式$f_1(x),f_2(x),f_3(x)$的一个组合.

6.例1 设$f_1(x)=x^3-x^2, f_2(x)=x^3-2x^2+x, f_3(x)=x^3-x^2-x+1$ $\in F[x]$, $\mathbf{A}(x)=diag(f_1(x),f_2(x),f_3(x))\in F[x]^{3\times 3}$.
(1)求可逆矩阵$\mathbf{U}(x),\mathbf{V}(x)\in F[x]^{3\times 3}$,使得$\mathbf{U}(x)\mathbf{A}(x)\mathbf{V}(x)$为标准形;
(2)求$(f_1(x),f_2(x),f_3(x))$与$[f_1(x),f_2(x),f_3(x)]$,并将$(f_1(x),f_2(x),$ $f_3(x))$表为多项式$f_1(x),f_2(x),f_3(x)$的一个组合.
解:构造6阶矩阵

$$\mathbf{C}(x)=\begin{pmatrix}\mathbf{A}(x) & \mathbf{E}_3\\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} x^3-x^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & x^3-2x^2+x & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x^3-x^2-x+1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \mathbf{O} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix},$$

主要结论

对$\mathbf{C}(x)$的前三行与前三列作初等变换

$$\mathbf{C}(x) \to \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & x^3-2x^2+x & 0 & -1+x & 1 & -x \\ 0 & 0 & x^5-x^4-x^3+x^2 & -x^2+1 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^2-1 & & & \\ 1 & 1 & x^2+x & & \mathbf{O} & \\ 1 & 0 & x^2 & & & \end{pmatrix},$$

(1)所求的可逆矩阵为

$$\mathbf{U}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x-1 & 1 & -x \\ -x^2+1 & 0 & x^2 \end{pmatrix}, \mathbf{V}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2-1 \\ 1 & 1 & x^2+x \\ 1 & 0 & x^2 \end{pmatrix},$$

同时$\mathbf{U}(x)\mathbf{A}(x)\mathbf{V}(x) = diag(x-1, x^3-2x^2+x, x^5-x^4-x^3+x^2)$.

(2)$(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = x-1, [f_1(x), f_2(x), f_3(x)] = x^5-x^4-x^3+x^2$,

进而$x-1 = u_{11}(x)v_{11}(x)f_1(x) + u_{12}(x)v_{21}(x)f_2(x) + u_{13}(x)v_{31}(x)f_3(x)$

$$= 1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + -1 \cdot f_3(x).$$

应用

本节主要利用对角多项式矩阵标准形给出矩阵多项式秩的和的一些恒等式.

应用

本节主要利用对角多项式矩阵标准形给出矩阵多项式秩的和的一些恒等式.

1. 设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{k}a_ix^i\in F[x],\mathbf{A}\in F^{n\times n}$,定义$f(\mathbf{A})=\sum\limits_{i=0}^{k}a_i\mathbf{A}^i$, 其中$\mathbf{A}^0=\mathbf{E}_n$, 则$f(\mathbf{A})\in F^{n\times n}$。再设$\mathbf{C}(x)=(c_{ij}(x))\in F[x]^{m\times m}$, 定义分块矩阵$\mathbf{C}(\mathbf{A})=(c_{ij}(\mathbf{A}))$, 则$\mathbf{C}(\mathbf{A})\in F^{mn\times mn}$, 特别地, 如果$\mathbf{C}(x)$是对角矩阵, 那么$\mathbf{C}(\mathbf{A})$是分块对角矩阵.

本节主要利用对角多项式矩阵标准形给出矩阵多项式秩的和的一些恒等式.

1. 设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{k}a_ix^i\in F[x],\mathbf{A}\in F^{n\times n}$,定义$f(\mathbf{A})=\sum\limits_{i=0}^{k}a_i\mathbf{A}^i$, 其中$\mathbf{A}^0=\mathbf{E}_n$, 则$f(\mathbf{A})\in F^{n\times n}$。再设$\mathbf{C}(x)=(c_{ij}(x))\in F[x]^{m\times m}$, 定义分块矩阵$\mathbf{C}(\mathbf{A})=(c_{ij}(\mathbf{A}))$, 则$\mathbf{C}(\mathbf{A})\in F^{mn\times mn}$, 特别地, 如果$\mathbf{C}(x)$是对角矩阵, 那么$\mathbf{C}(\mathbf{A})$是分块对角矩阵.

2.定理2 设$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)\in F[x]$是非零多项式,
$d_i(x)=\gcd\{lcm\{f_{m_1}(x),f_{m_2}(x),\cdots,f_{m_i}(x)\}|1\le m_1<\cdots<m_i\le m\}$,
$1\le i\le m,\mathbf{A}\in F^{n\times n}$. 那么

$$\sum_{i=1}^{m}r(f_i(\mathbf{A}))=\sum_{i=1}^{m}r(d_i(\mathbf{A})).$$

3.定理3 设$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x) \in F[x]$是非零多项式, $d_{m-i+1}(x) = lcm\{\gcd\{f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), \cdots, f_{m_1}(x)\}|1 \le m_1 < \cdots < m_i \le m\}$,
$1 \le i \le m$,$\mathbf{A} \in F^{n\times n}$, 那么

$$\sum_{i=1}^{m} r(f_i(\mathbf{A})) = \sum_{i=1}^{m} r(d_i(\mathbf{A}))$$

4.在定理3中,如果$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$两两互素, 那么

$$d_m(x) = \prod_{i=1}^{m} f_i(x), d_1(x) = \cdots = d_{m-1}(x) = 1.$$

由定理3, 我们有
推论1 [4,定理2.2; 5,定理1] 设$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x) \in F[x]$是非零多项式， $\mathbf{A} \in F^{n\times n}$.如果$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$两两互素, 那么

$$\sum_{i=1}^{m} r(f_i(A)) = (m-1)n + r(\prod_{i=1}^{m} f_i(A)).$$

5.例2 [6,定理2.1]

设$f(x), g(x), h(x) \in F[x], \mathbf{A} \in F^{n\times n}$,且$(f(x), h(x)) = 1$, 则

$$r(f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})) + r(g(\mathbf{A})h(\mathbf{A})) = r(f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})h(\mathbf{A})) + r(g(\mathbf{A})).$$

证: 设$f_1(x) = f(x)g(x), f_2(x) = g(x)h(x)$, 那么

$$d_1(x) = (f_1(x), f_2(x)) = g(x)(f(x), h(x)) = g(x),$$

$$d_2(x) = [f_1(x), f_2(x)] = g(x)[f(x), h(x)] = f(x)g(x)h(x).$$

由定理2得

$$r(f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})) + r(g(\mathbf{A})h(\mathbf{A})) = r(f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})h(\mathbf{A})) + r(g(\mathbf{A})).$$

6.例3 [5,命题4]设$\mathbf{A} \in F^{n\times n}$,对任何三个多项式$f(x), g(x), h(x) \in F[x]$,若有

$$f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})) = f(\mathbf{A})h(\mathbf{A})) = g(\mathbf{A})h(\mathbf{A})) = \mathbf{O},$$

则$f(x), g(x), h(x)$不可能两两互素.

证: 设$f_1(x) = f(x)g(x), f_2(x) = f(x)h(x), f_3(x) = g(x)h(x)$.
假设$f(x), g(x), h(x)$两两互素,那么

$$d_1(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = (f(x)g(x), f(x)h(x), g(x)h(x)) = 1,$$
$$d_2(x) = ([f_1(x), f_2(x)], [f_1(x), f_3(x)], [f_2(x), f_3(x)]) = f(x)g(x)h(x),$$
$$d_3(x) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x)] = f(x)g(x)h(x).$$

由定理2知,

$$\begin{aligned} & r(f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})) + r(f(\mathbf{A})h(\mathbf{A})) + r(g(\mathbf{A})h(\mathbf{A})) \\ = & r(E_n) + r(f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})h(\mathbf{A})) + r(f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})h(\mathbf{A})), \end{aligned}$$

即$0 = n$,矛盾.

7.例4[7,定理7]

设$\mathbf{A} \in F^{n\times n}$,正整数$m,t$满足$m > t \geq 2$, 则

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^m \text{当且仅当} r(\mathbf{A}^t) + r(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{m-t+1}) = r(\mathbf{A}).$$

证:设$f_1(x) = x^t, f_2(x) = x - x^{m-t+1}$,那么

$$(f_1(x), f_2(x)) = x, [f_1(x), f_2(x)] = x^t - x^m.$$

由定理2, 得

$$r(\mathbf{A}^t) + r(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{m-t+1}) = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}^t - \mathbf{A}^m).$$

于是

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^m \text{当且仅当} r(\mathbf{A}^t) + r(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{m-t+1}) = r(\mathbf{A}).$$

总结

本文的主要结论定理1不仅给出了对角多项式矩阵标准形的具体表达式，同时还给出了一个同时求多个多项式的最大公因式和最小公倍式以及将最大公因式表为这些多项式的组合的有效方法。利用定理1，本文还给出了多个矩阵多项式秩的和的一些恒等式，进一步丰富了有关矩阵秩的研究内容。

参考文献

[1] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M].2版. 北京:高等教育出版社, 1995:331-358.

[2] 林亚南. 高等代数[M]. 北京：高等教育出版社，2013：201-233.

[3] 刘宏锦, 周金森, 刘利敏. λ—矩阵的等价和矩阵多项式秩的恒等式[J]. 大学数学, 2016, 32(3):97-101.

[4] 林国钦, 杨忠鹏, 陈梅香. 矩阵多项式秩的一个恒等式及其应用[J]. 北华大学学报,2008,9(1): 5-8.

[5] 徐国进, 胡付高, 李发来. 一类矩阵多项式秩的恒等式[J].大学数学, 2010.26(2): 127-129.

[6] 胡付高, 曾玉娥. 一类矩阵多项式秩恒等式与应用［J]. 山东大学学报: 理学版, 2008, 43(8): 51-54.

[7] 杨忠鹏, 陈梅香,林国钦.关于矩阵方幂的秩恒等式的注记[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2009, 37(1):24-28.